บทที่ 6 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

หัวเรื่องหลัก (Topics)

6.1 ความหมายของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

6.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

6.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

6.4 การประยุกต์ใช้อนุพันธ์เพื่อหาค่าปริมาณทางไฟฟ้า

แนวคิดหลัก (Main Idea)

อนุพันธ์ของฟังก์ชันเป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน ณ จุดใด ๆ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตรจะช่วยให้การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันทำได้สะดวกและรวดเร็วขึ้น

อนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต คือ อนุพันธ์ที่ค่าของฟังก์ชันเขียนในรูปสัญลักษณ์ทางพีชคณิตที่ประกอบด้วยค่าคงที่ ตัวแปร และเครื่องหมาย บวก ลบ คูณ หาร กรณฑ์ หรือยกกำลัง

. อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ คือ อนุพันธ์ที่ค่าของฟังก์ชันเขียนในรูปฟังก์ชันไซน์ ฟังก์ชันโคไซน์ ฟังก์ชันแทนเจนต์ ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ ฟังก์ชันเซแคนต์ และฟังก์ชันโคเซแคนต์

สมรรถนะประจำหน่วย (Competency)

1. แสดงความรู้เกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
2. ประยุกต์ใช้อนุพันธ์เพื่อหาค่าปริมาณทางไฟฟ้าของวงจรไฟฟ้า

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม (Behavioral Objectives)

หลังจากศึกษาบทนี้แล้ว ผู้เรียนสามารถ

1. บอกความหมายของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
2. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตเบื้องต้นโดยใช้สูตรได้
3. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้สูตรได้
4. ประยุกต์ใช้อนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตเพื่อหาค่าปริมาณทางไฟฟ้าได้
5. ประยุกต์ใช้อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติเพื่อหาค่าปริมาณทางไฟฟ้าได้

เนื้อหาสาระ (Contents)

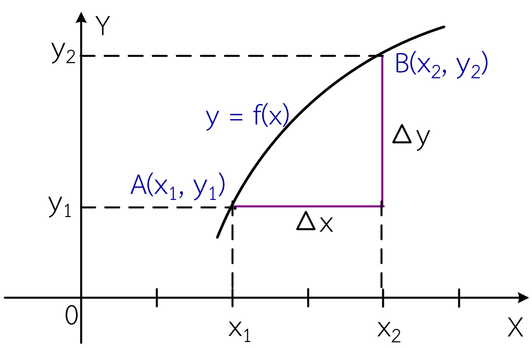
อนุพันธ์ของฟังก์ชัน (Derivative of Function) เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงชั่วขณะของฟังก์ชัน ณ จุดใดจุดหนึ่ง สามารถหาค่าได้ง่ายเมื่อใช้สูตรสำเร็จที่นักคณิตศาสตร์ได้สร้างเอาไว้ ในบทนี้จะไม่กล่าวถึงรายละเอียดในการพิสูจน์ต่าง ๆ แต่จะเน้นในการนำสูตรเหล่านั้นไปใช้และการนำไปประยุกต์ใช้ในทางไฟฟ้าที่ใช้มากโดยกล่าวถึงเพียงอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

6.1 ความหมายของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ที่มีสมบัติเฉพาะว่า ถ้าสมาชิกตัวหน้า (domain) ของคู่อันดับใด ๆ ที่เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์นั้นมีค่าเท่ากันแล้ว สมาชิกตัวหลัง (range) ของคู่อันดับดังกล่าวต้องเท่ากัน กล่าวคือ ความสัมพันธ์ f เป็นฟังก์ชันก็ต่อเมื่อถ้า (x, y) และ (x, z) เป็นสมาชิกของ f แล้วจะได้ว่า y = z ดังตัวอย่าง

$$\left.\begin{aligned} y &= 2x + 1 \\ f(x) &= 2x + 1 \end{aligned}\right\} \quad y = f(x)$$

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน ตามความหมายทางเรขาคณิตของอนุพันธ์ หมายถึง รูปแบบของสมการที่ประกอบด้วยอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ตั้งแต่ $x = x_1$ จนถึง $x = x_1 + \Delta x$ ดังรูปที่ 6.1



รูปที่ 6.1 อนุพันธ์ของฟังก์ชันขณะที่ x มีค่าใด ๆ

กำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$

เลือก $A(x_1, y_1)$ เป็นจุดใด ๆ บน f(x)

ถ้า x เปลี่ยนค่าไปจากเดิม Δx ทำให้ y เปลี่ยนค่าไปจากเดิม Δy

นั่นคือ $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

บทนิยามของอนุพันธ์: อนุพันธ์ของ y เทียบกับ x คือ ลิมิตของ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ เมื่อ Δx มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\frac{dy}{dx}$ หรือ $\frac{df(x)}{dx}$ หรือ y’ หรือ f’(x)

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

เมื่อลิมิตหาค่าได้ (exit) จะเรียกค่าของลิมิตนี้ว่า อนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยขั้นตอนวิธีการหาค่าของอนุพันธ์ เรียกว่า ดิฟเฟอเรนชิเอท (differentiate) หรือที่เรียกกันสั้น ๆ ว่า ดิฟ (diff)

$\frac{dy}{dx}$ อ่านว่า ดีวายบายดีเอกซ์ เป็นสัญลักษณ์แทน อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับการเปลี่ยนแปลงของ x ขณะที่ x มีค่าใด ๆ หรือบางครั้งเรียกว่า ดิฟวายเทียบกับเอกซ์ และ $\frac{dy}{dx} \neq \frac{y}{x}$

y' อ่านว่า วายไพรม์ และ f'(x) อ่านว่า เอฟไพรม์เอกซ์ หรือ เอฟไพรม์ออฟเอกซ์

ตัวอย่างที่ 6.1 จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงโดยเฉลี่ยของ $f(x) = 2x^2$ จาก $x = -1$ ถึง $x = 2$

วิธีทำ อัตราการเปลี่ยนแปลงโดยเฉลี่ยของ f ในช่วง x_1 ถึง x_2 กำหนดโดย

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$ เมื่อ $x_1 = -1$ และ $x_2 = 2$ แทนค่าแล้วได้เป็น

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2(x_2)^2 - 2(x_1)^2}{x_2 - x_1} = \frac{2(2)^2 - 2(-1)^2}{2-(-1)} = \frac{6}{3} = 2$$ **คำตอบ**

6.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

6.2.1 ความหมายของฟังก์ชันพีชคณิต

ฟังก์ชันพีชคณิต (algebraic functions) เป็นฟังก์ชันที่ค่าของฟังก์ชันเขียนในรูปสัญลักษณ์ทางพีชคณิตที่ประกอบด้วยค่าคงที่ ตัวแปร และเครื่องหมาย บวก ลบ คูณ หาร กรณฑ์ หรือยกกำลัง เช่น

$y = 2x + 1$, $f(x) = 4$, $y = 3x - x^2$, $y = |5x| + \sqrt{x+2}$, $y = \frac{3x+2}{2x^3}$

6.2.2 การใช้สูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยใช้นิยามอนุพันธ์ของฟังก์ชันในรูปของลิมิต จะค่อนข้างยุ่งยากในการคำนวณ จึงได้มีการหาอนุพันธ์โดยวิธีการใช้สูตรซึ่งทำได้ง่ายและรวดเร็วกว่า ดังตารางที่ 6.1

ตารางที่ 6.1 สูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต ถ้า c, n เป็นค่าคงที่ใด ๆ และ u = f(x), v = g(x), w = h(x)

สูตรที่	สูตร	สูตรที่	สูตร
D–1	$\frac{d(c)}{dx} = 0$	D–6	$\frac{dv^n}{dx} = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$
D–2	$\frac{dx}{dx} = 1$	D–7	$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$
D–3	$\frac{d(u+v+w)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx}$	D–8	$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$
D–4	$\frac{dcv}{dx} = c\frac{dv}{dx}$	D–9	$\frac{d}{dx}\frac{u}{v} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$
D–5	$\frac{d}{dx}\frac{v}{c} = \frac{1}{c}\frac{dv}{dx}$		

ตัวอย่างที่ 6.2 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

ก) $f(x) = \sqrt{7}$ ข) $g(x) = \cos 180^\circ$ ค) $h(x) = 3A$ เมื่อ A เป็นค่าคงที่

ง) $T(x)$ = อุณหภูมิของห้องทำงานที่ 25°

วิธีทำ

ก) $f(x) = \sqrt{7}$ เป็นค่าคงที่ ดังนั้น

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{7} = 0$$ **คำตอบ**

พิจารณาการใช้สูตร: ใช้สูตร D–1

$\frac{d(c)}{dx} = 0$ เมื่อ c คือ ค่าคงที่

ข) $g(x) = \cos 180^\circ = -1$ เป็นค่าคงที่ ดังนั้น

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\cos 180^\circ = 0$$ **คำตอบ**

$\frac{d(c)}{dx} = 0$ เมื่อ c คือ ค่าคงที่

ค) $h(x) = 3A$ เมื่อ A เป็นค่าคงที่ ดังนั้น

$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(2A) = 0$$ **คำตอบ**

$\frac{d(c)}{dx} = 0$ เมื่อ c คือ ค่าคงที่

ง) $T(x)$ = อุณหภูมิของห้องทำงานที่ 25° เป็นค่าคงที่

$$\frac{dT(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(25) = 0$$ **คำตอบ**

$\frac{d(c)}{dx} = 0$ เมื่อ c คือ ค่าคงที่

ตัวอย่างที่ 6.3 กำหนดให้ $y = x^4$ จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^4}{dx} = 4x^{4-1}$$

$$= 4x^3$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของฟังก์ชันเท่ากับ $4x^3$ **คำตอบ**

พิจารณาการใช้สูตร: ใช้สูตร D–7

$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ เมื่อ $n = 4$

ตัวอย่างที่ 6.4 กำหนดให้ $y = 5x$ จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(5x)}{dx} = 5\frac{dx}{dx}$$

$$= 5(1) = 5$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของฟังก์ชันเท่ากับ 5 **คำตอบ**

1 ใช้สูตร D–4

$\frac{dcv}{dx} = c\frac{dv}{dx}$ เมื่อ $v = x$

2 ใช้สูตร D–2

$\frac{dx}{dx} = 1$

ตัวอย่างที่ 6.5 กำหนดให้ $y = x^3 + 6$ จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^3+6)}{dx} = \frac{dx^3}{dx} + \frac{d5}{dx}$$

$$= 3x^{3-1} + 0$$

$$= 3x^2$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของฟังก์ชันเท่ากับ $3x^2$ **คำตอบ**

① ใช้สูตร D–3

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

② ใช้สูตร D–7 และ D–1

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \text{ และ } \frac{d(c)}{dx} = 0$$

ตัวอย่างที่ 6.6 จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = (3x - 2)(1 - 5x)$

วิธีทำ

การพิจารณาเพื่อเทียบใช้สูตรอนุพันธ์

① ใช้สูตร D–8 ดิฟผลคูณ $\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ เมื่อ $u = (3x - 2)$, $v = (1 - 5x)$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d(3x-2)(1-5x)}{dx} = (3x-2)\frac{d(1-5x)}{dx} + (1-5x)\frac{d(3x-2)}{dx}$$

② ใช้สูตร D–3 : $\frac{d(u-v)}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$

จาก $\frac{d(1-5x)}{dx}$ เมื่อ $u = 1$ และ $v = 5x$

จาก $\frac{d(3x-2)}{dx}$ เมื่อ $u = 3x$ และ $v = 2$ ได้เป็น

$$\frac{df(x)}{dx} = (3x-2)\left[\frac{d(1)}{dx} - \frac{d(5x)}{dx}\right] + (1-5x)\left[\frac{d(3x)}{dx} - \frac{d(2)}{dx}\right]$$

③ ในวงเล็บ [ ] ใช้สูตร D–1 ดิฟค่าคงที่เท่ากับศูนย์ และใช้สูตร D–4 ได้เป็น

$$\frac{df(x)}{dx} = (3x-2)\left[0 - 5\frac{d(x)}{dx}\right] + (1-5x)\left[3\frac{d(x)}{dx} - 0\right]$$

④ ที่ยังมีสัญลักษณ์ $\frac{d(x)}{dx}$ ใช้สูตร D–2 คือ $\frac{dx}{dx} = 1$ ได้เป็น

$$\frac{df(x)}{dx} = (3x-2)[-5(1)] + (1-5x)[3(1)]$$

$$= -15x + 10 + 3 - 15x$$

$$\frac{df(x)}{dx} = -30x + 13$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของฟังก์ชันเท่ากับ $-30x + 13$ **คำตอบ**

ตัวอย่างที่ 6.7 กำหนดให้ $f(x) = 3x^4 + 4x + 5$ จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน เมื่อ $x = 2$

วิธีทำ

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(2x^4 + 3x + 5) = \frac{d}{dx}(2x^4) + \frac{d}{dx}3x + \frac{d}{dx}5$$

$$= 2\frac{d}{dx}x^4 + 3\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}5$$

$$= 2(4)x^{4-1} + 3(1) + 0$$

$$f'(x) = 8x^3 + 3$$

เมื่อ $x = 2$ นำไปแทนค่า ได้เป็น

$$f'(2) = 8(2)^3 + 3 = 8(8) + 3 = 67$$

$$f'(2) = 67$$ **คำตอบ**

ตัวอย่างที่ 6.8 กำหนดให้ $y = (x^3 - 1)^{-6}$ จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^3 - 1)^{-6}}{dx}$$

$$= -6(x^3 - 1)^{-6-1}\frac{d(x^3 - 1)}{dx}$$

$$= -6(x^3 - 1)^{-6-1}\left[\frac{d(x^3)}{dx} - \frac{d(1)}{dx}\right]$$

$$= -6(x^3 - 1)^{-7}[3x^2 - 0]$$

$$\frac{dy}{dx} = -18x^2(x^3 - 1)^{-7}$$ **คำตอบ**

① ใช้สูตร D–3

$$\frac{dv^n}{dx} = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$$

เมื่อ $v = (x^3 - 1)$ และ $n = -6$

② ใช้สูตร D–7 และ D–1

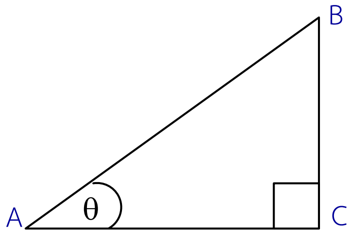
$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \text{ และ } \frac{d(c)}{dx} = 0$$

6.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

6.3.1 ความหมายและนิยามของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ (trigonometric functions) หมายถึง ฟังก์ชันไซน์ (sine or sin) ฟังก์ชันโคไซน์ (cosine or cos) ฟังก์ชันแทนเจนต์ (tangent or tan) ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ (cotangent or cot) ฟังก์ชันเซแคนต์ (secant or sec) และฟังกันโคเซแคนต์ (cosecant or cosec) เช่น $f(x) = 3 \sin 2x$ และ $f(x) = \sin x$ เป็นต้น

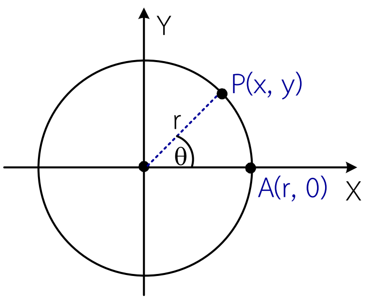
บทนิยาม: ให้สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยที่ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ดังรูปที่ 6.2



1) $\sin\theta = \frac{BC}{AB}$
2) $\cos\theta = \frac{AC}{AB}$
3) $\tan\theta = \frac{BC}{AC}$
4) $\operatorname{cosec}\theta = \frac{AB}{BC}$
5) $\sec\theta = \frac{AB}{AC}$
6) $\cot\theta = \frac{AC}{BC}$

รูปที่ 6.2 สามเหลี่ยมมุมฉาก

บทนิยาม: ให้วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด ถ้ามุม θ เรเดียน คือ มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม มีรัศมี r หน่วย ที่วัดทวนเข็มนาฬิกา เริ่มจากจุด A(r, 0) ไปยังจุด P(x, y) เป็นจุดปลายของแขนของมุมที่หมุนไป โดยที่ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ได้ดังรูปที่ 6.3



รูปที่ 6.3 วงกลมที่จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด

1) $\sin\theta = \frac{y}{r}$
2) $\cos\theta = \frac{x}{r}$
3) $\tan\theta = \frac{y}{x}$
4) $\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y}$
5) $\sec\theta = \frac{r}{x}$
6) $\cot\theta = \frac{x}{y}$

ทิศทางของมุม θ โดยใช้เครื่องหมายบวกและลบ
ถ้า $\theta > 0$ เป็นการวัดจากจุด A ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา
ถ้า $\theta < 0$ เป็นการวัดจากจุด A ทิศทางตามเข็มนาฬิกา

เพื่อความสะดวกในการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ จึงนำค่าฟังก์ชันสำหรับมุมในจตุภาคที่ 1 มาสร้างตารางได้ดังตารางที่ 6.2

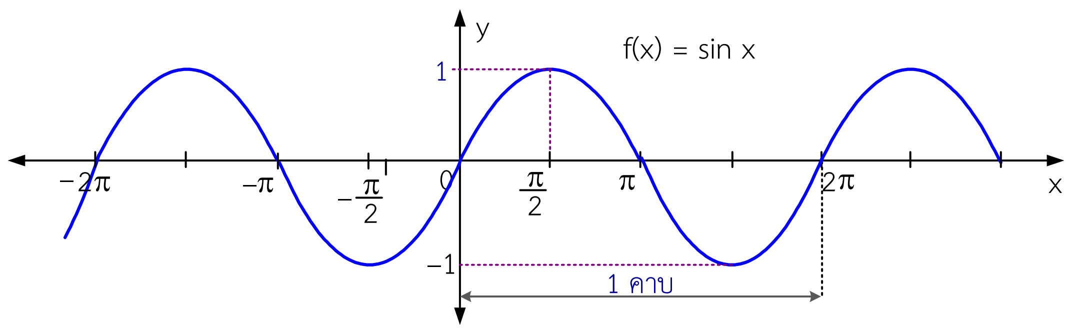
ตารางที่ 6.2 ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

องศา	0	30	45	60	90
เรเดียน	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ไม่นิยาม

บทนิยาม: ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันคาบก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง $p > 0$ ที่ $f(x + p) = f(x)$ ทุกค่า x ในโดเมน f เรียกค่า p ที่น้อยที่สุดว่า คาบของ f

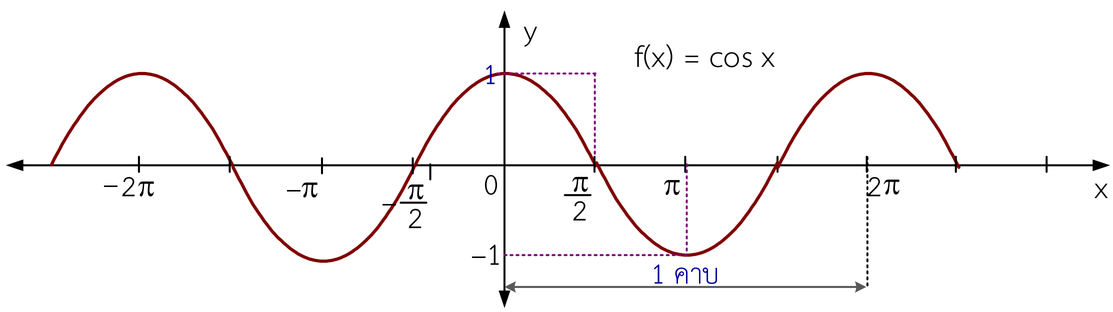
กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติบนระนาบพิกัดฉาก จะนิยมเปลี่ยนตัวแปร θ ไปเป็นตัวแปร x และเขียนฟังก์ชันให้อยู่ในรูป $y = \cos x$ หรือ $y = \sin x$ ซึ่งกราฟของ $y = \cos x$ หรือ $y = \sin x$ จะมีลักษณะซ้ำรูปเดิม เมื่อมุมวนมาครบรอบค่าใดค่าหนึ่ง เรียกฟังก์ชันลักษณะนี้ว่า ฟังก์ชันคาบ (periodie functions) โดยที่คาบ (period) หมายถึง ความยาวช่วงสั้นที่สุดที่ทำให้กราฟซ้ำรูปเดิม และแอมพลิจูด (amplitude) มีค่าเท่ากับครึ่งหนึ่งของผลต่างระหว่างค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันที่เป็นคาบ

1. กราฟของ $y = \sin x$



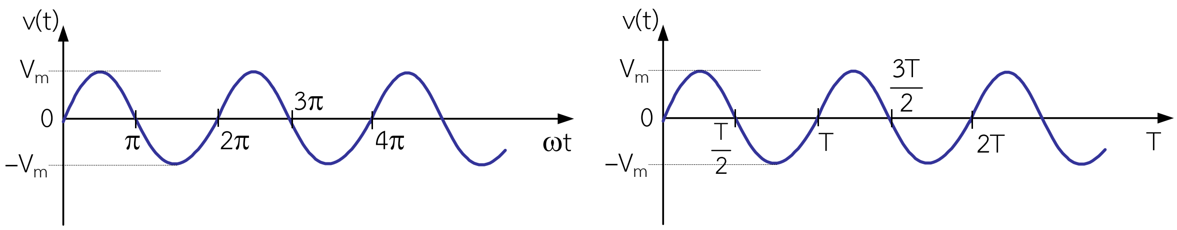
รูปที่ 6.4 กราฟของ $y = \sin x$

2. กราฟของ $y = \cos x$



รูปที่ 6.5 กราฟของ $y = \cos x$

กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติบนระนาบพิกัดฉาก เมื่อนำไปใช้ทางไฟฟ้าจะเปลี่ยนตัวแปร x ไปเป็นตัวแปร ωt หรือ t และเขียนเป็นตัวอย่างของฟังก์ชันให้อยู่ในรูป $v(t) = V_m \sin \omega t$ ดังรูปที่ 6.6



ก) เมื่อเป็นฟังก์ชันของ ωt ข) เมื่อเป็นฟังก์ชันของ t

รูปที่ 6.6 รูปคลื่นไซน์ของ $V_m \sin \omega t$

6.3.2 การใช้สูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ดังตารางที่ 6.3 และศึกษาการใช้สูตรจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตารางที่ 6.3 สูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สูตรที่	สูตร	สูตรที่	สูตร
D–10	$\frac{d}{dx}\sin u = \cos u\frac{du}{dx}$	D–13	$\frac{d}{dx}\cot u = -\csc^2 u\frac{du}{dx}$
D–11	$\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u\frac{du}{dx}$	D–14	$\frac{d}{dx}\sec u = \sec u \tan u\frac{du}{dx}$
D–12	$\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u\frac{du}{dx}$	D–15	$\frac{d}{dx}\csc u = -\csc u \cot u\frac{du}{dx}$

ตัวอย่างที่ 6.9 กำหนดให้ y = sin 6x จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sin(6x) = \cos(6x)\frac{d(6x)}{dx}$$

$$= \cos(6x)\,6\frac{dx}{dx}$$

$$= [\cos(6x)]6(1)$$

$$\frac{dy}{dx} = 6\cos(6x)$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของฟังก์ชันเท่ากับ 6 cos(6x)

คำตอบ

① ใช้สูตร D–10

$$\frac{d}{dx}\sin u = \cos u\frac{du}{dx}$$

เมื่อ u = 6x

② ใช้สูตร D–4 และ D–2

$$\frac{dcv}{dx} = c\frac{dv}{dx}$$

เมื่อ v = x และ $\frac{dx}{dx} = 1$

ตัวอย่างที่ 6.10 กำหนดให้ $f(x) = \sin(4x) + \cos(3x)$ จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

วิธีทำ

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\sin(4x) + \frac{d}{dx}\cos(3x)$$

$$= \cos(4x)\frac{d4x}{dx} - \sin(3x)\frac{d3x}{dx}$$

$$= 4\cos(4x)\frac{dx}{dx} - 3\sin(3x)\frac{dx}{dx}$$

$$f'(x) = 4\cos(4x) - 3\sin(3x)$$

คำตอบ

① ใช้สูตร D–3

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

เมื่อ $u = \sin(4x)$, $v = \cos(3x)$

② ใช้สูตร D–10 และ D–11

$$\frac{d}{dx}\sin u = \cos u\frac{du}{dx}, \; u = 4x$$

$$\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u\frac{du}{dx}, \; u = 3x$$

③ $\frac{dcv}{dx} = c\frac{dv}{dx}$ และ $\frac{dx}{dx} = 1$

ตัวอย่างที่ 6.11 กำหนดให้ $z = \cos(t^4)$ จงหา $\frac{dz}{dt}$

วิธีทำ

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}\cos(t^4) = -\sin(t^4)\frac{d(t^4)}{dt}$$

$$= -\sin(t^4)\,(4t^{4-1})\frac{dt}{dt}$$

$$= -\sin(t^4)\,(4t^3)$$

$$\frac{dz}{dt} = -4t^3\sin(t^4)$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของฟังก์ชันเท่ากับ $-4t^3\sin(t^4)$

คำตอบ

① ใช้สูตร D–11

$$\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u\frac{du}{dx}$$

เมื่อ $u = t^4$

② ใช้สูตร D–7

$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ เมื่อ $x = t$

③ ใช้สูตร D–2

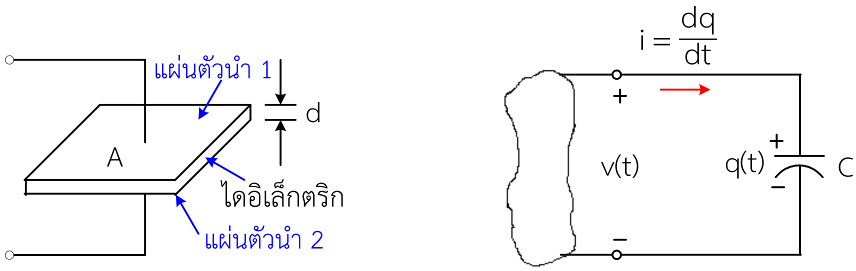
$\frac{dx}{dx} = 1$ นั่นคือ $\frac{dt}{dt} = 1$

6.4 การประยุกต์ใช้อนุพันธ์เพื่อหาค่าปริมาณทางไฟฟ้า

การประยุกต์ใช้อนุพันธ์เพื่อหาค่าปริมาณทางไฟฟ้า จะศึกษาถึงอุปกรณ์สองชนิด คือ ตัวเก็บประจุ และตัวเหนี่ยวนำ อุปกรณ์ทั้งสองนี้เป็นองค์ประกอบเชิงเส้นและอธิบายคุณสมบัติได้ด้วยสมการอนุพันธ์เชิงเส้น (ตัวต้านทานไม่สามารถสะสมพลังงานไฟฟ้าได้) ซึ่งทั้งสองเป็นอุปกรณ์แบบพาสซีฟที่สามารถกักเก็บและจ่ายพลังงานที่จำกัดได้ แต่ไม่สามารถจ่ายกำลังไฟฟ้าเฉลี่ยในช่วงเวลาที่ไม่จำกัดได้ ความสัมพันธ์ระหว่างแรงดันไฟฟ้าและกระแสไฟฟ้าของอุปกรณ์ทั้งสองนี้ขึ้นอยู่กับฟังก์ชันเทียบกับเวลา

6.4.1 ตัวเก็บประจุ (Capacitors)

ตัวเก็บประจุ เป็นองค์ประกอบวงจรที่ประกอบด้วยแผ่นตัวนำ 2 แผ่น มีขนาดพื้นที่ A วางแยกขนานกันด้วยระยะ d มีไดอิเล็กตริก (dielectric) ซึ่งเป็นวัสดุมีสภาพเป็นฉนวนไฟฟ้ากั้นอยู่ระหว่างแผ่นตัวนำ ดังรูปที่ 6.7



ก) โครงสร้างของตัวเก็บประจุ ข) สัญลักษณ์ทางไฟฟ้า

รูปที่ 6.7 ตัวเก็บประจุและสัญลักษณ์ทางไฟฟ้า

เมื่อต่อวงจรดังรูปที่ 6.7 ข) จะเกิดการเก็บสะสมประจุไว้ในตัวนี้เรียกว่า การเก็บประจุ (charge) หรือการชาร์จ และจำนวนของประจุ (Q) ที่สะสมไว้ที่แผ่นตัวนำนั้นแปรผันตรงกับแรงดันของแหล่งกำเนิดตามสมการ $Q \propto V$

และ $$Q = CV$$

เมื่อ Q คือ ประจุไฟฟ้า มีหน่วยเป็น คูลอมบ์ (coulomb: C)

โดยค่า C = Q/V เรียกค่า C นี้ว่า ความจุไฟฟ้าหรือคาปาซิแตนซ์ จึงนิยามได้ว่า “ความจุไฟฟ้าของตัวเก็บประจุ คือ ปริมาณของประจุไฟฟ้าที่เก็บสะสมไว้บนแผ่นตัวนำแต่ละแผ่นต่อหนึ่งหน่วยแรงดันระหว่างแผ่นตัวนำทั้งสองนั้น” สัญลักษณ์อักษร Q, V ตัวพิมพ์ใหญ่ใช้แทนปริมาณที่ไม่ขึ้นกับเวลาเช่นไฟฟ้ากระแสตรง ถ้าปริมาณทั้งสองเปลี่ยนแปลงตามเวลา (ฟังก์ชันเทียบกับเวลา) นั้นใช้ตัวพิมพ์เล็ก นั่นคือ

$$q = Cv \quad \text{.......................................} \quad ❶$$

จากนิยามของกระแสกล่าวว่า กระแส คือ อัตราการเคลื่อนที่ของประจุไฟฟ้าต่อหน่วยเวลา

$$i(t) = \frac{dq}{dt} \quad \text{.......................................} \quad ❷$$

นำค่า q ในสมการที่ ❶ มาแทนในสมการที่ ❷ เขียนสมการใหม่ได้เป็น

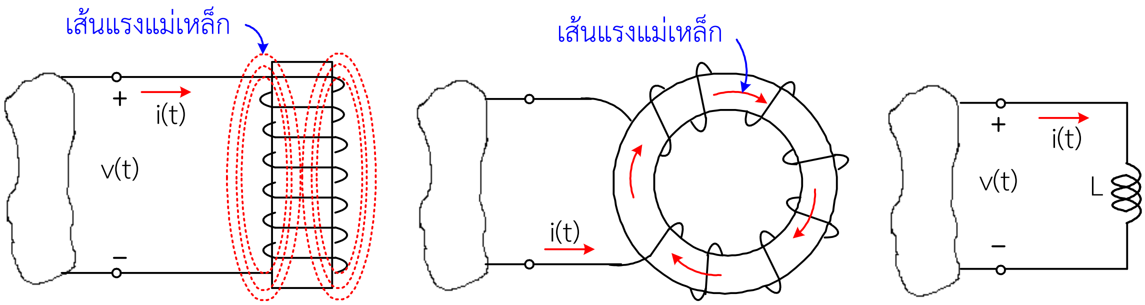
$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \quad \text{.......................................} \quad ❸$$

เมื่อ C คือ ค่าคงที่ เรียกว่า ความจุไฟฟ้า มีหน่วยวัดเป็น ฟาราด (farad: F)

สมการที่ ❸ มีข้อสังเกตว่า กระแส i จะไหลผ่านตัวเก็บประจุได้ก็ต่อเมื่อแรงดันตกคร่อมตัวมันมีการเปลี่ยนแปลงค่าอยู่เสมอ ถ้าแรงดัน v คงที่ ผลของการหาค่าอนุพันธ์จะได้เท่ากับศูนย์ และแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุไม่สามารถเปลี่ยนแปลงแบบฉับพลันได้

6.4.2 ตัวเหนี่ยวนำ (Inductors)

ตัวเหนี่ยวนำเป็นองค์ประกอบวงจรที่ประกอบด้วยลวดตัวนำเป็นขดลวด (coil) ดังรูปที่ 6.8



ก) ตัวเหนี่ยวนำแกนอากาศ ข) ตัวเหนี่ยวนำแกนเฟอร์ไรต์ ค) สัญลักษณ์ของตัวเหนี่ยวนำ

รูปที่ 6.8 ตัวเหนี่ยวนำ 2 ชนิดและสัญลักษณ์ทางไฟฟ้า

ตัวเหนี่ยวนำเป็นอุปกรณ์พาสซีฟที่สามารถเก็บสะสมพลังงานได้เช่นเดียวกับตัวเก็บประจุ แต่พลังงานสะสมจะต่างกันคือ ตัวเหนี่ยวนำสะสมพลังงานในรูปสนามแม่เหล็กก็ต่อเมื่อกระแสที่ไหลผ่านตัวมันมีการเปลี่ยนแปลง (ไม่คงที่)

ในตัวเหนี่ยวนำ สนามแม่เหล็กที่เปลี่ยนแปลงสามารถเหนี่ยวนำให้เกิดแรงดัน v ขึ้น ค่าแรงดันนี้เป็นอัตราส่วนกับอัตราการเปลี่ยนแปลงของกระแสที่ทำให้เกิดสนามแม่เหล็กเทียบกับเวลา ค่าคงที่ของอัตราส่วนนี้เรียกว่า ความเหนี่ยวนำหรืออินดักแตนซ์ (inductance: L) และแรงดันตกคร่อมตัวเหนี่ยวนำได้เป็น

$$v(t) \quad = \quad L\frac{di(t)}{dt} \qquad \text{..} \quad ❹$$

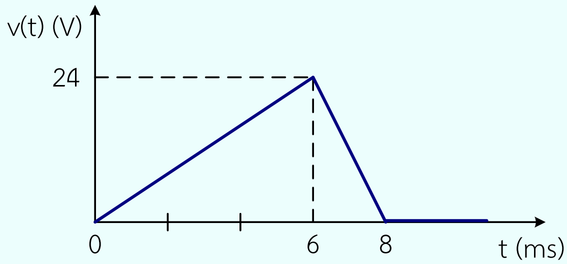
เมื่อ L คือ ค่าคงที่ เรียกว่า ความเหนี่ยวนำ มีหน่วยวัดเป็น เฮนรี (henry: H)

โดยที่ 1 H = 1 V-s/A

6.4.3 การประยุกต์ใช้สูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

การประยุกต์ใช้สูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตและฟังก์ชันตรีโกณมิติเพื่อหาค่าปริมาณทางไฟฟ้า โดยศึกษาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 6.12 จากรูป เป็นรูปคลื่นแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุตัวหนึ่ง ขนาด 5 μF จงหาจำกระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านตัวมันที่ช่วงเวลา t = 0–6 ms และ t = 6–8 ms (ตัวอย่างนี้ต่อเนื่องจากตัวอย่างที่ 5.18)



รูปคลื่นแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุ

> **เงื่อนไขความรู้**
> กระแสจะไหลผ่านตัวเก็บประจุก็ต่อเมื่อแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุมีการเปลี่ยนแปลง (ไม่คงที่) ถ้าคงที่ผลการอนุพันธ์จะได้เท่ากับศูนย์

วิธีทำ ที่เวลา $0 \le t \le 6$ ms หาสมการเส้นตรง v = mt + b

$$v = (4 \times 10^{3})t \qquad \text{..........................} ❶$$

ที่เวลา $6 \le t \le 8$ ms หาสมการเส้นตรง v = mt + b

$$v = (-12 \times 10^{3})t + 96 \qquad \text{..........................} ❷$$

ที่เวลา 8 ms $\le t$, หาสมการเส้นตรง v = mt + b

$$v = 0 \qquad \text{..........................} ❸$$

ที่เวลา $0 \le t \le 6$ ms นำสมการเส้นตรง ❶ มาแทนค่าในสูตร i(t) เพื่อหาค่ากระแสไฟฟ้า

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

$$= (5 \times 10^{-6})\frac{d(4 \times 10^{3})t}{dt}$$

$$i(t) = (5 \times 10^{-6})(4 \times 10^{3})\frac{dt}{dt}$$

$$= 20 \text{ mA}$$

ดังนั้นที่ $0 \le t \le 6$ ms กระแสไหล 20 mA

คำตอบ

เมื่อ C คือ ค่าความจุ 5 μF แปลงหน่วยเป็นฟาราดได้ (5×10^{-6}) ซึ่งเป็นค่าคงที่

① ประยุกต์ใช้สูตร D–4

$$\frac{dcv}{dx} = c\frac{dv}{dx}$$

เมื่อ $c = (4 \times 10^{3})$ และ v = t

② ประยุกต์ใช้สูตร D–2

$$\frac{dx}{dx} = 1 \text{ นั่นคือ } \frac{dt}{dt} = 1$$

ที่เวลา $6 \le t \le 8$ ms นำสมการเส้นตรง ❷ มาแทนค่าในสูตร i(t) เพื่อหาค่ากระแสไฟฟ้า

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} = (5\times10^{-6})\frac{d[(-12\times10^{3})t+96]}{dt}$$

$$= (5\times10^{-6})\frac{d(-12\times10^{3})t}{dt}$$

$$= (5\times10^{-6})(-12\times10^{3})\frac{dt}{dt}$$

$$i(t) = -60\ \text{mA}$$

สูตรของอนุพันธ์

$$\frac{dc}{dx} = 0$$

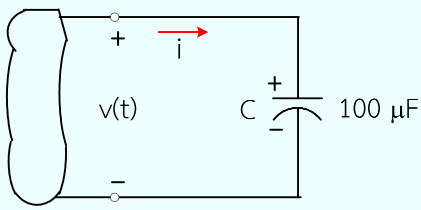
$$\frac{dx}{dx} = 1$$

$$\frac{d(cv)}{dx} = c\frac{dv}{dx}$$

เมื่อcเป็นค่าคงที่

ที่ $6 \le t \le 8$ ms กระแสไหล –60 mA (ทิศทางตรงข้ามกับที่เวลา $0 \le t \le 6$ ms) **คำตอบ**

ตัวอย่างที่ 6.13 จากรูป ถ้าแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุได้ v(t) = 4 sin5t V จงหากระแสที่ไหลผ่านตัวเก็บประจุขนาด 100 μF ที่เวลา t = 6 s



วิธีทำ

คาปาซิแตนซ์เป็นค่าคงที่

ค่าคงที่

u

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

$$= (100\times10^{-6})\frac{d}{dt}(4\sin 5t)$$

$$= (100\times10^{-6})(4)\frac{d}{dt}\sin 5t$$

$$= (100\times10^{-6})(4)\cos 5t\ \frac{d5t}{dt}$$

$$= (100\times10^{-6})(4)(5)\cos 5t\ \cancel{\frac{dt}{dt}}^{\,=1}$$

$$= (2000\times10^{-6})\cos 5t\ \ \text{A}$$

$$i(t) = 2\cos 5t\ \ \text{mA}$$

สูตรของอนุพันธ์สำหรับ
ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

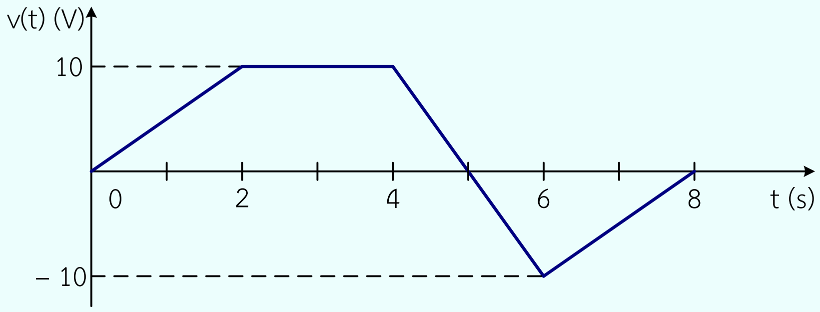
$$\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u\frac{du}{dx}$$

กระแสที่ไหลผ่านตัวเก็บประจุขนาด 100 μF เท่ากับ 2 cos5t mA ดังนั้นที่ t = 6 s ได้

$$i(6) = 2\cos 5(6) = 2\cos 30$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1.732\ \text{mA}$$ **คำตอบ**

ตัวอย่างที่ 6.14 จากรูปคลื่นแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุ จงหากระแส i ที่ไหลผ่านตัวเก็บประจุขนาด 1 μF ในช่วงเวลา t = 0 ถึง t = 8 s (ตัวอย่างนี้ต่อเนื่องจากตัวอย่างที่ 5.19)



วิธีทำ

ที่เวลา $0 \le t \le 2$ s หาสมการเส้นตรงได้ $v = 5t$ ....❶

ที่เวลา $2\text{ s} \le t \le 4$ s หาสมการเส้นตรงได้ $v = 10$ V ....❷

ที่เวลา $4\text{ s} \le t \le 6$ s หาสมการเส้นตรงได้ $v = -10t + 50$ ....❸

ที่เวลา $6\text{ s} \le t \le 8$ s หาสมการเส้นตรงได้ $v = 5t + 40$ ....❹

ที่เวลา $0 \le t \le 2$ s นำสมการเส้นตรง ❶ แทนค่าในสูตร i(t) ได้เป็น

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} = (1 \times 10^{-6})\frac{d5t}{dt}$$

$$= 5 \times 10^{-6} \text{ A}$$ **คำตอบ**

ที่เวลา $0 \le t \le 2$ s นำสมการเส้นตรง ❷ แทนค่าในสูตร i(t) ได้เป็น

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} = (1 \times 10^{-6})\frac{d10}{dt}$$

$$= 0 \text{ A}$$ **คำตอบ**

ที่เวลา $4\text{ s} \le t \le 6$ s นำสมการเส้นตรง ❸ แทนค่าในสูตร i(t) ได้เป็น

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} = (1 \times 10^{-6})\frac{d(-10t+50)}{dt}$$

$$= -10 \times 10^{-6} \text{ A}$$ **คำตอบ**

ที่เวลา $6\text{ s} \le t \le 8$ s นำสมการเส้นตรง ❹ แทนค่าสูตร i(t) ได้เป็น

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} = (1 \times 10^{-6})\frac{d(5t-40)}{dt}$$

$$= 5 \times 10^{-6} \text{ A}$$ **คำตอบ**

ตัวอย่างที่ 6.15 ตัวเหนี่ยวนำขนาด 2 mH มีกระแสไฟฟ้าขนาด i(t) = 2 sin377t A ไหลผ่าน จงหาแรงดันตกคร่อมในตัวเหนี่ยวนำ

วิธีทำ $v(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$ → L มีหน่วยเป็น mH ทำหน่วยให้เป็น H และเป็นค่าคงที่

$= (2 \times 10^{-3})\dfrac{d}{dt}(2\sin 377t)$ → 2 เป็นค่าคงที่ นำไปไว้หน้า $\dfrac{d}{dt}$

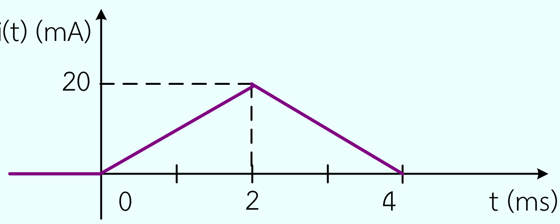
$= 2(2 \times 10^{-3})\dfrac{d}{dt}(\sin 377t)$ → ใช้สูตร D–10 เมื่อ u = 377t

$= (4 \times 10^{-3})\cos(377t)\dfrac{d}{dt}(377t)$ → ใช้สูตร D–4 เมื่อ c = 377

$= 377(4 \times 10^{-3})\cos 377t$ → จะได้คำตอบเมื่อ $\dfrac{d}{dt}$ หมดไป

$v(t) = 1.508\cos 377t$ V **คำตอบ**

ตัวอย่างที่ 6.15 จากรูป เป็นรูปคลื่นกระแสไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำ 10 mH จงหาแรงดันไฟฟ้าที่ตกคร่อมตัวเหนี่ยวนำ ในช่วงเวลา t = 0 ถึง t = 4 ms



รูปคลื่นของกระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำ

เงื่อนไขความรู้

แรงดันจะตกคร่อมตัวเหนี่ยวนำก็ต่อเมื่อกระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำมีการเปลี่ยนแปลง (ไม่คงที่) ถ้าคงที่ผลการอนุพันธ์จะได้เท่ากับศูนย์

วิธีทำ ที่เวลา $0 \le t \le 2$ ms หาสมการเส้นตรง i = mt + b ได้เป็น

$$i(t) = \frac{20 \times 10^{-3} t}{2 \times 10^{-3}} = 10t \quad \text{.............} ❶$$

ที่เวลา $2 \le t \le 4$ ms หาสมการเส้นตรง i = mt + b ได้เป็น

$$i(t) = \frac{-20 \times 10^{-3} t}{2 \times 10^{-3}} + (40 \times 10^{-3})$$

$$= -10t + (40 \times 10^{-3}) \quad \text{.............} ❷$$

ที่เวลา 4 ms < t, หาสมการเส้นตรง i = mt + b ได้เป็น

$$i(t) = 0 \quad \text{.............} ❸$$

ที่เวลา $0 \le t \le 2$ ms นำ ❶ แทนค่าในสูตร v(t) ได้เป็น

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} = (10 \times 10^{-3})\frac{d10t}{dt}$$

$$= (10 \times 10^{-3})(10)\frac{dt}{dt}$$

$v(t) = 100$ mV **คำตอบ**

สูตรของอนุพันธ์

$$\frac{dcv}{dx} = c\frac{dv}{dx}$$

ที่เวลา $2 \le t \le 4$ ms นำ ❷ แทนค่าในสูตร v(t) ได้เป็น

สูตรของอนุพันธ์

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$\begin{aligned}
v(t) &= L\frac{di(t)}{dt} \\
&= (10\times10^{-3})\frac{d(-10t)+(4\times10^{-3})}{dt} \\
&= (10\times10^{-3})\left[\frac{d(-10t)}{dt}+\frac{d(4\times10^{-3})}{dt}\right] \\
&= (10\times10^{-3})(-10)\frac{dt}{dt} \\
v(t) &= -100 \text{ mV}
\end{aligned}$$

คำตอบ

สรุปสาระสำคัญ

1. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน ณ จุดใด ๆ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตรสำหรับหาอนุพันธ์ ซึ่งจะช่วยให้การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันทำได้สะดวกและรวดเร็วขึ้น

2. อนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต คือ อนุพันธ์ที่ค่าของฟังก์ชันเขียนในรูปสัญลักษณ์ทางพีชคณิตที่ประกอบด้วยค่าคงที่ ตัวแปร และเครื่องหมาย บวก ลบ คูณ หาร กรณฑ์ หรือยกกำลัง เช่น $\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^3-1)^6}{dx}$

สูตรสำคัญเพื่อการนำไปใช้ได้รวดเร็วขึ้น

$\frac{dx}{dx} = 1$	$\frac{dv^n}{dx} = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$
$\frac{d(u+v+w)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx}$	$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$
$\frac{dcv}{dx} = c\frac{dv}{dx}$	$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

3. อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ คือ อนุพันธ์ที่ค่าของฟังก์ชันเขียนในรูปฟังก์ชันไซน์ ฟังก์ชันโคไซน์ ฟังก์ชันแทนเจนต์ ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ ฟังก์ชันเซแคนต์ และฟังก์ชันโคเซแคนต์ เช่น $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sin(4x)$

สูตรสำคัญเพื่อการนำไปใช้ได้รวดเร็วขึ้น

$\frac{d}{dx}\sin u = \cos u\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u\frac{du}{dx}$

4. การประยุกต์ใช้อนุพันธ์เพื่อหาค่าปริมาณทางไฟฟ้าจะใช้หาความสัมพันธ์ของสิ่งที่มีอัตราการเปลี่ยนแปลงค่าอยู่เสมอ (ไม่คงที่) ตามฟังก์ชันเทียบกับเวลา เช่น ความสัมพันธ์ของกระแสและแรงดันของอุปกรณ์ตัวเก็บประจุและตัวเหนี่ยวนำ

แบบฝึกหัดบทที่ 6

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

จงตอบคำถามหรือแสดงวิธีทำให้ถูกต้อง

เรื่อง ความหมายของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

1. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน หมายถึงอะไร
2. ดิฟเฟอเรนชิเอท หมายถึงอะไร

เรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

3. ฟังก์ชันพีชคณิต หมายถึงอะไร
4. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้

4.1 $y = x^5$

4.2 $y = x^{-4}$

4.3 $y = \frac{1}{x^5}$

4.4 $y = 2x^5$

4.5 $y = 4x^{-2}$

4.6 $y = 5x^3 - 2x^{-4} + \sqrt{x} - 7$

4.7 $y = (3x^2 + 5x - 7)^5$

4.8 $y = (5x - 3)^8$

4.9 $y = (x + 1)(5x - 7)$

4.10 $y = (3x^2 - 2)(1 - 5x^3)$

4.11 $f(x) = 7x - 3$ ที่ $x = 2$

4.12 $f(x) = 4x^3 + 1$ ที่ $x = -3$

4.13 $f(x) = 2x^4 + 3x + 5$ ที่ $x = 2$

4.14 $f(x) = 2x^6$ ที่ $x = 1$

4.15 $y = (x^2 - 5)^3$

เรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

5. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ หมายถึงอะไร
6. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้

6.1 $y = \sin(12x)$

6.2 $f(x) = \cos(7x) + \sin(5x)$

6.3 $h(x) = \sec(ax)\cot(bx)$ เมื่อ a, b เป็นค่าคงที่

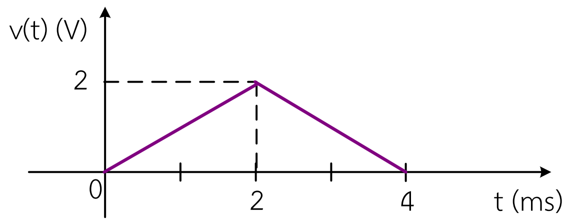
6.4 $w = \cos(2t^3)$ จงหา $\frac{dw}{dt}$

6.5 $z = 4\sin(5t)$ จงหา $\frac{dz}{dt}$

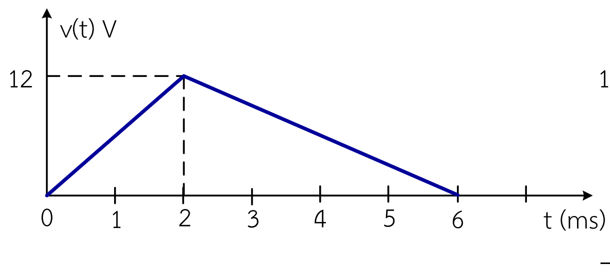
6.6 $y = (\sin(2x))(\cos(8x))$

เรื่อง การประยุกต์ใช้อนุพันธ์เพื่อหาค่าปริมาณทางไฟฟ้า

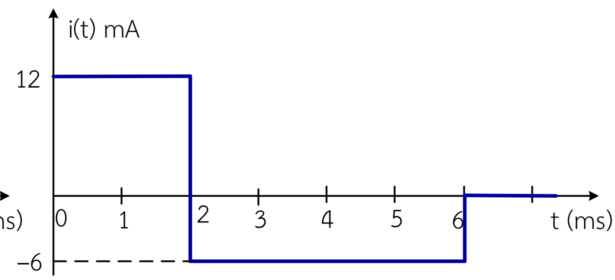
7. จากรูป เป็นรูปคลื่นแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุตัวหนึ่งขนาด 6 μF จงหาค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านตัวมันที่ช่วงเวลา t = 0 ms ถึง t = 4 ms



8. จากรูป ก) เป็นรูปคลื่นแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุตัวหนึ่งขนาด 2 μF จงหาค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านตัวมันที่ช่วงเวลา t = 0 ms ถึง t = 6 ms (Irwing, Divid J. 2002: 165).

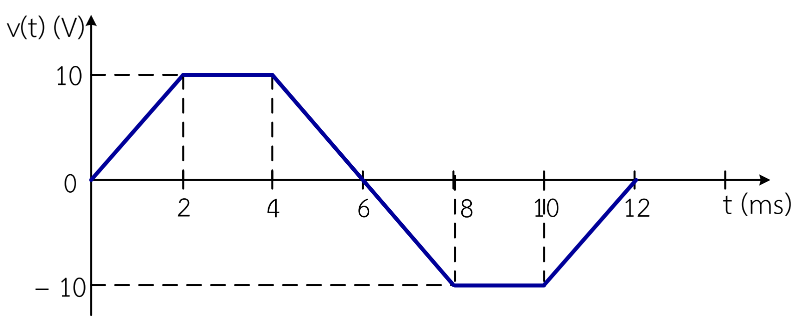


ก) รูปคลื่นแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุ



ข) รูปคลื่นกระแสไหลผ่านตัวเก็บประจุ

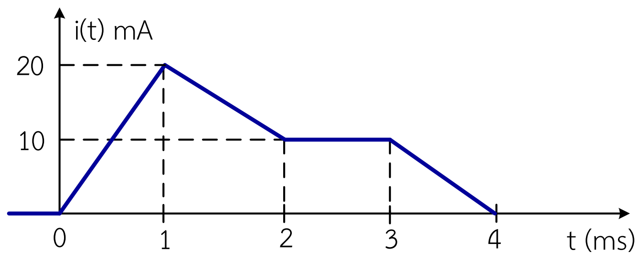
9. จากรูป เป็นรูปคลื่นแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุตัวหนึ่งขนาด 50 μF จงหาค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านตัวมันที่ช่วงเวลา t = 0 ms ถึง t = 6 ms



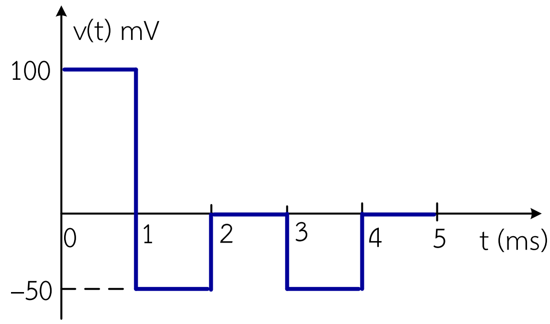
10. ตัวเหนี่ยวนำขนาด 10 H มีกระแส $i(t) = 25te^{-t}$ A ไหลผ่าน ถ้าให้ $i(t_0) = 0$ จงหาแรงดันตกคร่อมตัวเหนี่ยวนำที่ t = 0 และ t = 0.5 s

(ใช้สูตรอนุพันธ์ $\dfrac{d(uv)}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$ เมื่อ u = t และ $v = e^{-t}$)

11. จากรูป ก) เป็นรูปคลื่นกระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำขนาด 5 mH จงหาค่าแรงดันตกคร่อมตัวเหนี่ยวนำตัวนี้ที่ช่วงเวลา t = 0 ms ถึง t = 4 ms

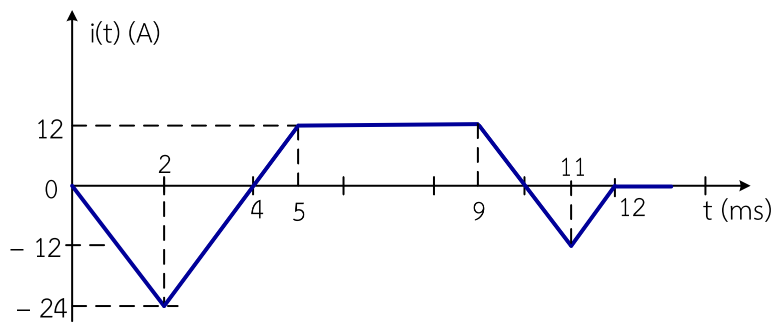


ก) รูปคลื่นกระแสไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำ



ข) รูปคลื่นแรงดันตกคร่อมตัวเหนี่ยวนำ

12. จากรูป เป็นรูปคลื่นกระแสในตัวเหนี่ยวนำขนาด 16 mH จงหาค่าแรงดันตกคร่อมตัวเหนี่ยวนำ ที่ช่วงเวลา t = 0 ms ถึง t = 12 ms



แบบทดสอบหลังเรียน

บทที่ 6 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

1. ข้อใดให้ความหมายของอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้ถูกต้องที่สุด

   ก. การหาความสัมพันธ์ของ sin, cos และ tan

   ข. การหาค่าเฉลี่ยของตัวแปร y เทียบกับตัวแปร x

   ค. อัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน ณ จุดใด ๆ

   ง. การเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันตัวแปร y

2. ฟังก์ชันในข้อใดไม่เป็นฟังก์ชันพีชคณิต

   ก. $h(x) = 4x + 2$ ข. $f(x) = 3x + 2\sqrt{x}$

   ค. $y = 2t$ ง. $w(x) = 3x + 5\sin 4x - 1$

3. กำหนดให้ $y = 5x^3 - x + 3$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ เท่ากับข้อใด

   ก. $5x^2 + 1$ ข. $15x^2 - 1$

   ค. $2x + 3$ ง. $15x^2 - 3$

4. กำหนดให้ $y = (4x + 4)(2 - 6x)$ เริ่มต้นการใช้สูตรตามข้อใด

   ก. $\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ ข. $\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

   ค. $\frac{dv^n}{dx} = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$ ง. $\frac{dcv}{dx} = c\frac{dv}{dx}$

5. ถ้า $f(x) = 3x^2 + 6$ แล้ว $f'(2)$ เท่ากับข้อใด

   ก. 3 ข. 5

   ค. 6 ง. 12

6. กำหนดให้ $z = (t^3 - 1)^{-5}$ เริ่มต้นการเทียบใช้สูตรตามข้อใด

   ก. $\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ ข. $\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

   ค. $\frac{dv^n}{dx} = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$ ง. $\frac{dcv}{dx} = c\frac{dv}{dx}$

7. กำหนดให้ $y = \sin(\omega t)$ เมื่อ ω เป็นค่าคงที่ หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรงกับข้อใด

   ก. $\frac{dy}{dx} = \cos(\omega t)\frac{d(\omega t)}{dx}$ ข. $\frac{dy}{dt} = \cos(\omega t)\frac{d(\omega t)}{dt}$

   ค. $\frac{dy}{dx} = -\sin(\omega t)$ ง. $\frac{dy}{dt} = -\cos(\omega t)$

8. กำหนดให้ y = cos(6t) หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรงกับข้อใด

ก. $\frac{dy}{dx} = -\sin(6x)\frac{d(x)}{dx}$ ข. $\frac{dy}{dt} = \sin(6x)\frac{d(6x)}{dx}$

ค. $\frac{dy}{dx} = -\tan(6t)$ ง. $\frac{dy}{dt} = -6\sin(6t)$

9. กำหนดให้ $w = \cos(2t^4)$ หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรงกับข้อใด

ก. $\frac{dy}{dx} = -\sin(2t^4)$ ข. $\frac{dy}{dt} = 4\cos(2t)\frac{d(2t)}{dx}$

ค. $\frac{dw}{dt} = -8t^3\sin(2t^4)$ ง. $\frac{dy}{dt} = -8t^4\sin(2t^3)$

10. ตัวเก็บประจุตัวหนึ่งขนาด 5 μF มีการประจุจนแรงดันตกคร่อมคงที่แล้ว กระแสที่ไหลผ่านจะเป็นอย่างไร

ก. $i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} = 0$ ข. $i(t) = C\frac{di(t)}{dt}$ = ค่ากระแสสูงสุดของวงจร

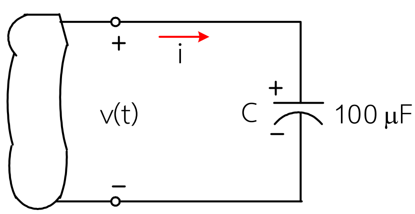
ค. $i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$ = ค่ากระแสต่ำสุดของวงจร ง. $i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} = C$

11. ตัวเหนี่ยวนำขนาด 1 H มีกระแสไหลผ่านคงที่แล้ว แรงดันตกคร่อมจะเป็นอย่างไร

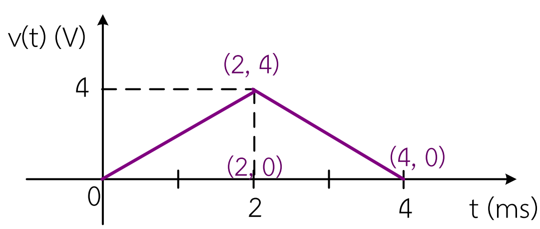
ก. $v(t) = L\frac{dv(t)}{dt} = \propto$ ข. $v(t) = L\frac{dv(t)}{dt}$ = แรงดันสูงสุดของวงจร

ค. $v(t) = L\frac{dv(t)}{dt}$ = แรงดันต่ำสุดของวงจร ง. $v(t) = L\frac{di(t)}{dt} = 0$

จากรูป จงใช้ตอบคำถามข้อ 12 – 13



ก) วงจรตัวเก็บประจุ



ข) รูปคลื่นแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุ

สมการเส้นตรงที่ $0 \le t \le 2$ ms: $v(t) = (2 \times 10^3)t$ V

$2 \le t \le 4$ ms: $v(t) = (-2 \times 10^3)t + 8$ V

12. ที่เวลา $0 \le t \le 2$ ms กระแส i ไหลผ่านตัวเก็บประจุมีค่าเท่าไร

ก. $i(t) = (100\times10^{-6})\frac{d(2\times10^3)t}{dt} = 20$ mA

ข. $i(t) = (100\times10^{-6})\frac{d(2\times10^3)t}{dt} = 200$ mA

ค. $i(t) = (100\times10^{-3})\frac{d(2\times10^3)t}{dt} = 200$ A

ง. $i(t) = (100\times10^{-6})\frac{d(2)t}{dt} = 200$ μA

13. ที่เวลา $2 \le t \le 4$ ms กระแส i ไหลผ่านตัวเก็บประจุมีค่าเท่าไร

ก. $i(t) = (100\times10^{-6})\dfrac{d(-2\times10^{3})t}{dt} = -20$ mA

ข. $i(t) = (100\times10^{-3})\dfrac{d(-2\times10^{3})t}{dt} = -200$ A

ค. $i(t) = (100\times10^{-6})\dfrac{d(-2\times10^{3})t}{dt} = -200$ mA

ง. $i(t) = (100\times10^{-6})\dfrac{d(-2)t}{dt} = -200\ \mu A$

14. วงจรตัวเหนี่ยวนำ ขนาด 3 mH มีกระแสไฟฟ้าขนาด i(t) = 4 sin314t A ไหลผ่าน แรงดันตกคร่อมในตัวเหนี่ยวนำมีค่าตรงตามข้อใด

ก. $v(t) = (3\times10^{-3})\dfrac{d}{dt}(4\sin314t)$ V

ข. $v(t) = (3\times10^{-3})\dfrac{d}{dt}(\sin314t)$ V

ค. $v(t) = 3\dfrac{d}{dt}(4\sin314t)$ V

ง. $v(t) = (3\times10^{-3})\dfrac{d}{dt}(\cos314t)$ V

15. วงจรตัวเก็บประจุ ขนาด 50 μF มีแรงดันตกคร่อมขนาด v(t) = 3 sin6t V กระแสที่ไหลผ่านตัวเก็บประจุมีค่าตรงตามข้อใด

ก. $i(t) = (50\times10^{-3})\dfrac{d}{dt}(3\sin6t)$ A

ข. $i(t) = (150\times10^{-6})\dfrac{d}{dt}(\sin6t)$ A

ค. $i(t) = (50\times10^{-6})\dfrac{d}{dt}\sin(6t)$ A

ง. $i(t) = (150\times10^{-3})\dfrac{d}{dt}(3\sin6t)$ A